Теория на множествата

Питагор – първият дал строго формално доказателство. Талес преди него, но и до днес спорят дали Талес е дал формалното доказателство или само е формулирал и обосновал с езикови средства. Излиза се от сферата на емпиричните наблюдения и разсъждения.

Следващата стъпка се прави около 2 века по-късно от Аристотел (384 – 322 г.пр.н.е.). Прави първите крачки към началото на математическата логика: „Аналитика” и „Топика”. Въвежда за първи път идеята за конюнкция, дизюнкция, отрицание, импликация, еквивалентност. Трудовете му са обект на активно изучаване на средновековните схоластици. Аристотел е и този, който дава идеята за кванторите за общност и съществуване. Първият, който успява да схване смисъла на кванторите, е Готфрид Лайбниц. В днешната математика се използват и означенията, въведени от Лайбниц. Така след съждителното смятане, предложено от Аристотел, се появава и предикатното смятане.
Аристотел е и първият, който говори за аксиоми – първични понятия. Той дава примери за аксиоми: $A \vee \neg A$. Тази идея е доразвита от Евклид: когато имаме система от аксиоми, тя трябва да бъде пълна и непротиворечива съвкупност – т.е. всяка нова аксиома да може или да се потвърди или да се опровергае на база първоначално възприетите аксиоми. В продължение на 2200 години това е единственият вид логика.
Лобачевски (1792-1856), Карл Фридрих Гаус (1777-1855), Янош Бояй
Бернхард Риман (1826-1866) – последният аспирант на Гаус, през 1860-те години защитава дисертация, съдържаща елементи от неевклидовите геометрии.

Аристотел е въвел и модалните оператори: необходимо □ и възможно ◊.
А – съждение. Р(А) – предикат
Можем да въведем
- “необходимо А” – съвкупността от всички съждения $B_1B_2\dots$, такива, че ако А е вярно, и всяко едно от тях също ще е вярно.
- “възможно А” – съвкупността от всички съждения $C_1C_2\dots$, такива, че ако всяко от тях е вярно, и съждението А ще е вярно.

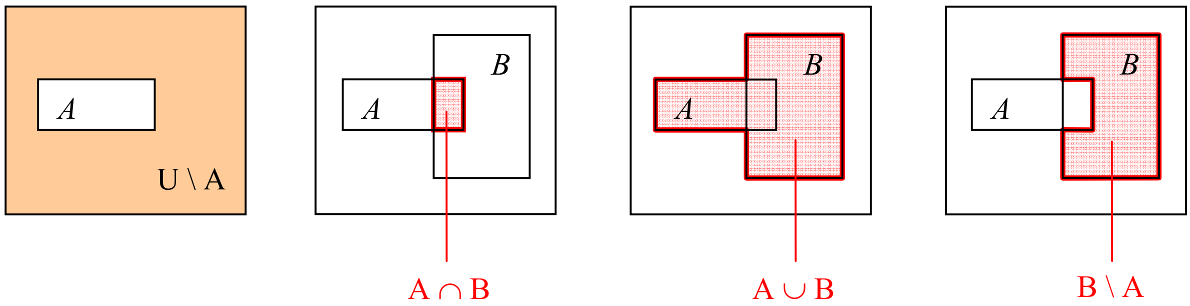
Кантор (1845-1918) през 1870-те години започва да се занимава с тригонометричени редове. Започва да се мъчи да даде дефиниция на понятието „множество”: *Група обекти на нашата интуиция и интелект, мислени като едно цяло, ще наричаме* ***множество***.
Ако имаме някакво множество X и x е негов елемент, ще се бележи с $x \in X$.
Пример: множеството на простите числа от 1 до 10.
- дескриптивен запис: {2,3,5,7}
- аналитичен запис: $\{p \mid$ “p е просто число” & “$1 \leq p \leq 10$”$\}$

$\forall x \mathscr{P}(x)$ и $\exists\, x \mathscr{P}(x)$ са отново съждения.

Операции върху множество.
Нека имаме множество $A = \{x \mid \mathscr{A}(x)\}$ $B = \{ x \mid \mathscr{B}(x)\}$, където $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ са предикати
Обединение: $A \cup B = \{x \mid \mathscr{A}(x)\ \&\ \mathscr{B}(x)\}$
Сечение: $A \cap B = \{x \mid \mathscr{A}(x) \vee \mathscr{B}(x)\}$
Отрицание: $\neg A = \{x \mid \neg \mathscr{A}(x)\}$
Разлика: $A - B = \{x \mid \mathscr{A}(x)\ \&\ \neg \mathscr{B}(x)\}$

Кантор въвежда и понятието *универсум*.

Диаграми на Вен



Релации

$A \subset B$ iff $\forall x\, (x \in A \rightarrow x \in B)$

$A = B$ iff $A \subset B$ & $B \subset A$

Мощност на множество

$P(X) = \{ Y \mid Y \subset X \}$ – множеството на всички подмножества на X (power set)

Мощността на P(X) се означава по един от трите начина: $\overline{\overline{X}}, |X|, card(X)$

$P(\{1,2,3\}) = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$| P(\{1,2,3\}) | = 8 = 2^3$

Множеството с n елемента има мощност 2^n и може да се докаже, че винаги $n < 2^n$

$Y \subset X \Rightarrow |Y| \leq |X|$, но не и обратно

$|P(X)| = 2^{|X|} > |X|$

Парадокс на Кантор. Нека построим множеството $\mathcal{X}$ на всички множества.
Нека построим и множествата на всички подмножества на $\mathcal{X}$, $P(\mathcal{X})$.
Следователно, $\mathcal{X} \supset P(\mathcal{X})$. Следователно $|\mathcal{X}| \geq |P(\mathcal{X})| = 2^{|\mathcal{X}|} > |\mathcal{X}|$
Този парадокс е преоткрит и от много други по-късно.

Примери за мощности на множества

Връзка между множествата на простите и естествените числа $\mathbb{P}$ и $\mathbb{N}$: $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$
Кантор казва, че две множества X и Y са равномощни, ако съществува взаимоеднозначна функция $f: X \rightarrow Y$ между тях.
Още по времето на Евклид е известно, че простите са безкрайно много. Доказателство. Нека имаме краен брой прости: $p_1,\ldots,p_n$. Нека направим $q = p_1.p_2. \ldots .p_n +1$ При деление на q на всяко от числата $p_1,\ldots,p_n$ ще има остатък, следователно допускането, че простите са краен брой, е невярно.

Връзка между множествата на естествените и целите $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

$-n$	…	-2	-1	0	1	2	3	…	n
$2n$	…	4	2	0	1	3	5	…	$2n$-1

Връзка между множествата на естествените и рационалните числа $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

1/1	1/2	1/3	…	1/n	...
2/1	2/2	2/3			
3/1	3/2				
...					
n/1					
…					

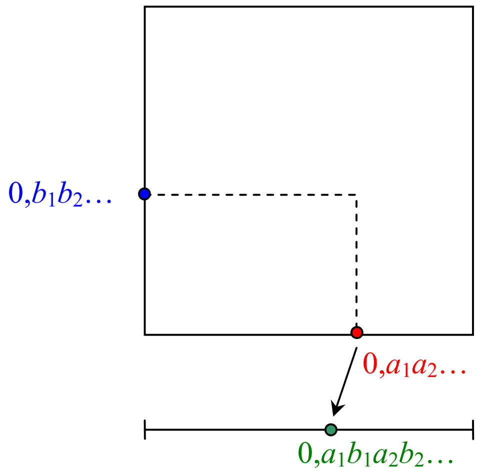
Образува се редицата: 1/1, 1/2, 2/1, 3/1, 2/2, 1/3, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, 5/1, ...

Връзка между множествата на естествените и реалните числа $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$
За удобство да се работи само с реалните числа от интервала [0;1].
Разглеждаме съответствие между число от интервала [0;1] . Да допуснем, че в интервала [0;1] има толкова число, колкото са естествените. Следователно, можем да ги наредим в редица:

$0, a_{11}\, a_{12} \ldots$
$0, a_{21}\, a_{22} \ldots$
…

Да построим числото $0, a_{11}^{*}\, a_{22}^{*} \ldots$където $a_{i\,i}^{*}$ е цифрата, която следва след цифрата $a_{i\,i}$, ако тя е между 0 и 8, и е 0, ако $a_{i\,i} = 9$. Това число се различава от първото горе по първата цифра, от второто по втората цифра, и т.н., следователно то не е от горния списък. От друга страна, очевидно е от интервала [0;1]. Следователно стигаме до противоречие.
$|\mathbb{R}|$ е експоненциално много повече от $|\mathbb{N}|$
$|\mathbb{R}| = |\,[0;1]\,|$

Множеството на реалните и комплексните. С други думи къде има повече точки – в отсечката или в квадрата с дължина на страната тази отсечка?



На всяка точка от квадрата с координати $0{,}a_1a_2\ldots$ $0{,}b_1b_2\ldots$ може да се съпостави точка от отсечката с дължина $0{,}a_1b_1a_2b_2\ldots$ Следователно $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = \ldots |\mathbb{R}^n| < |\mathbf{2}^{[0;1]}|$

Аритметика на мощностите на Кантор

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$

$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$

$\aleph_{n+1} + \aleph_n = \aleph_{n+1}$

Трансфинитни числа

Континуум хипотеза (CH, Кантор): Няма множество, чиято мощност е по-голяма от $\aleph_0$ и по-малка от $\aleph_1$.

През 1898 година Джузепе Пеано показва, че аритметиката може да се опише в термините на теория на множествата. Година по-късно и Хилберт показва, че и геометрията може да се опише така.
Давид Хилберт (1862 - 1943) изнася доклад през август 1900 година, в който формулира 23 проблема на математиката.
Първата аксиоматика прави Ернст Цермело, 1902 година, Френкел я разширява през 1922 година. Аксиоматична система става известна като ZF.
Едва през 1961 година Паул Коен показва, че Континуум хипотезата, разгледана като аксиома, е независима от аксиоматична система ZF
ZF + CH и ZF + ¬CH са две независими аксиоматични системи

1905 – няколко парадокси, които разклащат вярата на математиците в теорията на множествата.
Бертран Ръсел (1872 – 1970) – един от първите примери за парадокси. Парадокс на бръснаря. Парадокс на библиотечните каталози. Парадокс на самоприложимите думи.
Хилберт предлага да се намерят алгоритми, които на краен брой стъпки да могат да проверяват дали дадено твърдение е вярно или не. Ръсел предлага друг подход – всяко твърдение да се представи формално логически и да се доказва със средствата на логиката.
Лейтцен Брауер (1881-1961) формулира за първи път понятието *неподвижна точка* и доказва, че за всяко компактно множество и дефинирана над него непрекъсната функция, изобразяваща множеството в самото себе си, ще съществува точка $x = f(x)$.

Размито множество

$$\{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \mid x \in E \} \text{ , където } 0 \leq \mu_A(x) \leq 1$$

Интуиционистки размито множество

$$\{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in E \} \text{ , където } 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1 \text{ .}$$

Следователно, има и трети елемент, $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$
Всяко (И)РМ може да се разглежда като класическо множество, но над нов универсум. Лотфи Заде разтяга множеството {0,1} до интервала [0;1]. При ИРМ универсумът е $E \times [0;1] \times [0;1]$, т.е. ще има поне толкова елементи колкото в интервала [0;1]. Както и в стандартния случай, могат да се дефинират различни операции над ИРМ.

Операции над ИРМ (модифицирани операции над РМ)

Сечение: $A \cap B = \{ \langle x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(\nu_A(x), \nu_B(x)) \rangle \mid x \in E\}$

Обединение: $A \cup B = \{ \langle x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(\nu_A(x), \nu_B(x)) \rangle \mid x \in E\}$

Събиране: $A + B = \{ \langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x), \nu_A(x).\nu_B(x) \rangle \mid x \in E\}$

Умножение: $A \,.\, B = \{ \langle x, \mu_A(x).\mu_B(x), \nu_A(x) + \nu_B(x) - \nu_A(x).\nu_B(x) \rangle \mid x \in E\}$

Аналог на средно аритметично: $A @ B = \{< x, \frac{\mu_A + \mu_B}{2}, \frac{\nu_A + \nu_B}{2} > \mid x \in E\}$

Отрицание: $\neg A = \{ \langle x, \nu_A(x), \mu_A(x) \rangle \mid x \in E\}$

Импликация: *(изхождайки от* $x \to y = \neg x \vee y$*)*

$A \to B = \{ \langle x, \max(\mu_B(x), \nu_A(x)), \min(\mu_A(x), \nu_B(x) \rangle \mid x \in E \}$

Тъждества

$((A \cap B) + (A \cup B)) @ ((A \cap B).(A \cup B)) = A @ B$

Релация за включване при две ИРМ

$A \subset B$ iff $\forall x\, (x \in E)\, (\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ & $\nu_A(x) \ge \nu_B(x))$

$A = B$ iff $A \subset B$ & $B \subset A$

Други операции: $A – B, n.A, A^n$

В случая на класическата теория на множествата

$((A \cup B) \cap (\neg A \cup \neg B)) = (\neg A \cap B) \cup (A \cap \neg B)$

В случая на ИРМ

$((A \cup B) \cap (\neg A \cup \neg B)) \subset (\neg A \cap B) \cup (A \cap \neg B)$

Всичко дотук е пряко следствие от теорията на РМ, без нещо принципно ново. Разликата идва с модалните оператори.

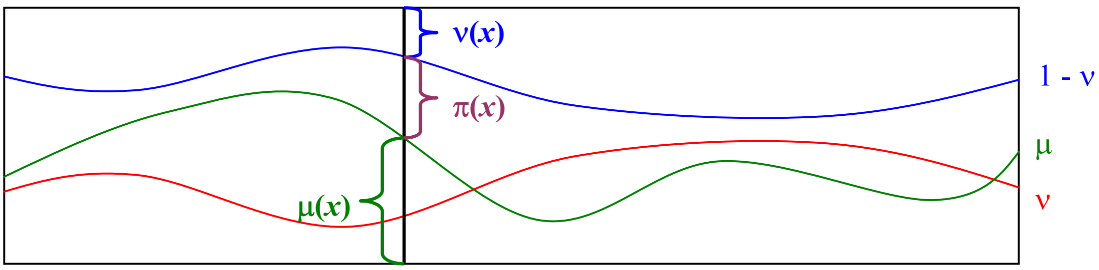
Оператори необходимо и възможно

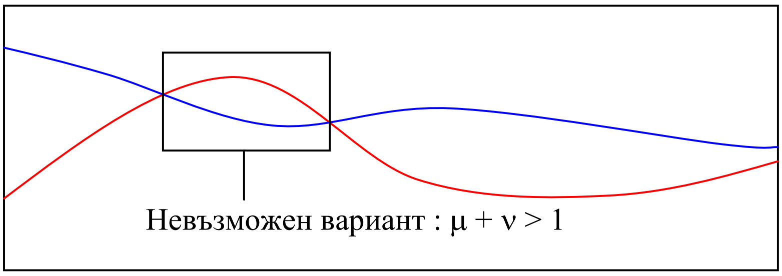
$\Box A = \{< x, \mu_A , 1\text{-}\mu_A > \mid x \in E \}$

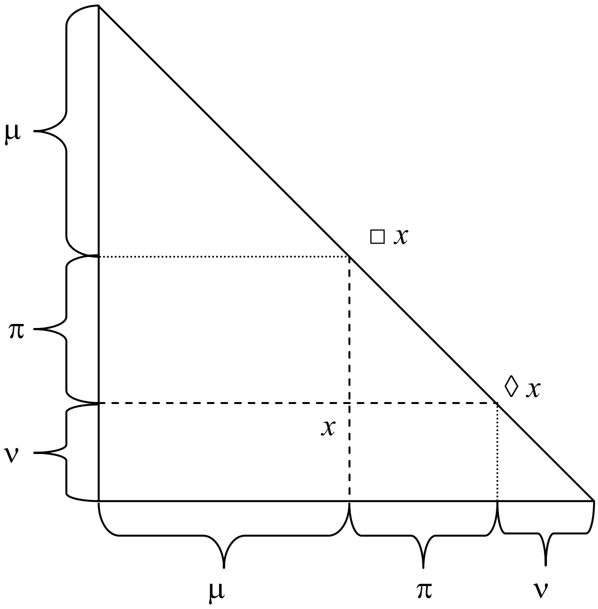
$\Diamond A = \{< x, 1\text{-}\mu_A , \mu_A > \mid x \in E \}$

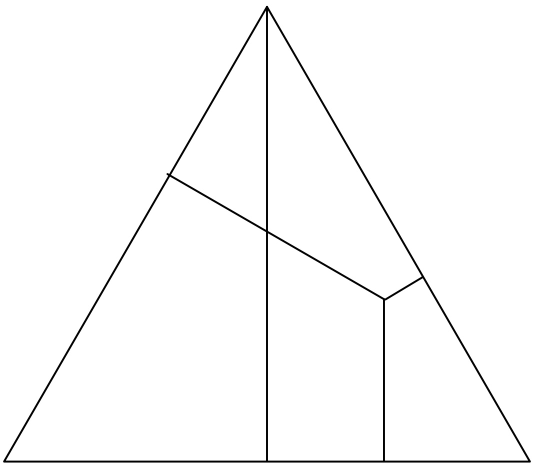
Твърдение: $\Box A \subseteq A \subseteq \Diamond A$

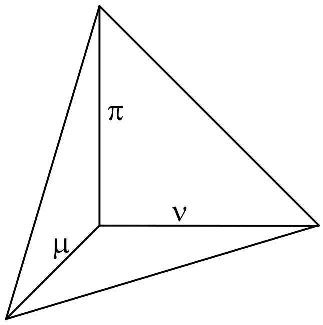
Геометрична интерпретация на ИРМ











Правила за извод

Modus Ponens: $\dfrac{X, X \to Y}{Y}$, $\dfrac{\textit{Днес е понеделник. Ако денят е понеделник, то имам лекции}}{\textit{Днес имам лекции}}$

$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{P} \rangle$

Множество от аксиоми $\boldsymbol{A}$, множество от предикати $\boldsymbol{P}$. Модел $\langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{V} \rangle$ на $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{P} \rangle$

1. $(\forall \mathrm{A} \in \boldsymbol{A})(\mathrm{V}(\mathrm{A}) = \sup \boldsymbol{M})$
2. $(\forall \mathrm{T})((\exists \mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2,\ldots,\mathrm{S}_n)((\mathrm{S}_1 \in \boldsymbol{A}) \ \& \ (\mathrm{S}_2 \in \boldsymbol{A} \vee \mathrm{S}_1 \mapsto \mathrm{S}_2) \ \& \ \ldots \& \ (\mathrm{S}_{n-1} \in \boldsymbol{A} \vee \mathrm{S}_{n-2} \mapsto \mathrm{S}_{n-1}) \ \&$
   $(\mathrm{S}_{n-1} \mapsto \mathrm{S}_n = \mathrm{T}) \ \& \ (\mathrm{V}(\mathrm{T}) = \sup \boldsymbol{M}))$
3. $(\forall \mathrm{T})(\mathrm{V}(\mathrm{T}) = \sup \boldsymbol{M} \rightarrow (\exists \mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2,\ldots,\mathrm{S}_n)((\mathrm{S}_1 \in \boldsymbol{A}) \ \& \ (\mathrm{S}_2 \in \boldsymbol{A} \vee \mathrm{S}_1 \mapsto \mathrm{S}_2) \ \& \ \ldots \&$
   $(\mathrm{S}_{n-1} \in \boldsymbol{A} \vee \mathrm{S}_{n-2} \mapsto \mathrm{S}_{n-1}) \ \& \ (\mathrm{S}_{n-1} \mapsto \mathrm{S}_n = \mathrm{T}))$

Джулия Робинсън – процедура за модификация на логически изрази за отстраняване на квантори, с цел опростяване на изразите. На тази база се появява езикът Пролог.

Хотел на Хилберт

През 1920-те години започват да се предоказват всички теореми в математиката от гледна точка на интуиционизма, без безкрайност и без Закона за изключеното трето. Интуиционизмът е доктрина, която гарантира, че няма да изпаднем в противоречие. Работата на Гьодел (1906-1970) от 1931 г. – доказва че каквато и система от аксиоми да си измислим, в нея ще има твърдение, което нито да може да се докаже, нито да се опровергае. Следователно, идеята на Хилберт, че всяко твърдение в краен брой стъпки може да бъде доказано / опровергано, пропада. А също и на Ръсел. Остава само доктрината на Брауер за интуиционизма.
Ново направление в математиката – дискретна / конструктивна математика. Терминът „конструктивна" е в руската литература, а „дискретна" – в английската.
Гьодел публикува трудовете на починалия преди да защити дисертацията си Жак Ербран; така се появява теория на рекурсията.

$$\left| \begin{array}{l} f(0) = a \\ f(n+1) = g(n, f(n)) \end{array} \right.$$

1932 – Самуел Клини - μ-рекурсия, $\mu\,(f(x_1,\ldots,x_n,z)) = y$
1932 – Машина на Емил Пост
1935 – Машина на Алан Тюринг

Тезисът на Чърч – Машината на Тюринг може да реализира всяка рекурсивна функция и всяка рекурсивна функция може да се реализира с машина на Тюринг.

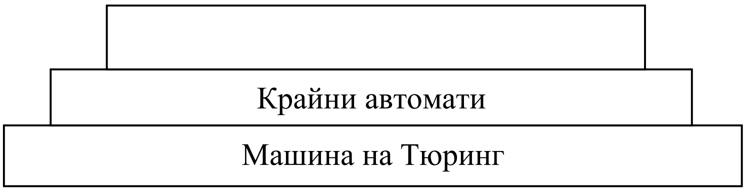
Може ли да се намери обект, който не може да се опише с машината на Тюринг, но може да се опише с други средства?

През 1920-те години Хилберт поставя въпроса да се намери нова аксиоматика на теория на множествата. Такава е дискутирана от Джон фон Нойман, след него Исаак Бернайс, третият е Курт Гьодел в рамките на по-малко от половин година. Прието е да се нарича NBG аксиоматика, за разлика от аксиоматиката ZF. NBG въвежда понятието „клас" като *множеството от всички подмножества на дадено множество,* и малко изкуствено забранява да се строи *класа на всички класове*, като по този начин преодолява парадокса на Кантор.

Кибернетика. Теория на системите с обратни връзки.

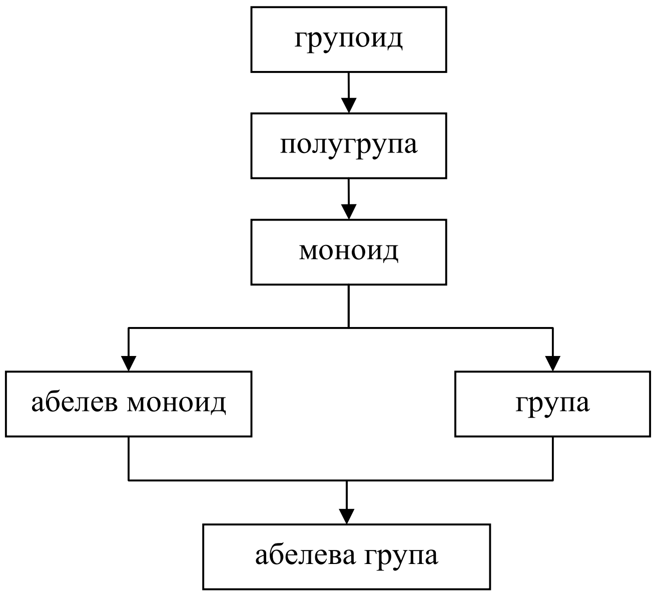
Блоксхемите имат същите моделиращи възможности като машината на Тюринг, μ-рекурсия, машина на Пост, λ-смятане, нормални алгоритми на Андрей Марков.

Ноам Чомски – теория на формалните езици и граматики. Колкото е по-специализиран крайния автомат, от толкова по-висок клас е езикът, но толкова по-малко моделиращи възможности има



- 1959 – Хелена Рашова, Роман Сикорски – теория на алгебричната логика – начин да се алгебризира логиката, в частност модалната логика.
- 1932 – Колмогоров – теория на вероятностите в терминита на теория на множествата
- Еми Ньотер (1885-1935) – теория на групите, Бартел Лендерт ван дер Варден (1903-1996) – алгебрата в термините на теория на множествата.
- 1933 – Жан Дийодоне (1906-1992) – целия анализ в термините на теория на множествата.
- Никола Бурбаки – около 30 книги – топология, анализ, алгебра.
- 1948 – теория на категориите, като разширение на теория на множествата, с акцент върху функциите

Теория на групите



$<M, *>$ се нарича групоид iff
$(\forall\, a,b \in M)(a * b \in M)$
Т.е. множество затворено относно операция.
Например: $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$ но не и $(\mathbb{N}, -)$

$< M, * >$ се нарича полугрупа iff $< M, * >$ е групоид & $(\forall\, a,b,c \in M)(a*(b*c) = (a*b)*c)$
Например: $(\mathbb{N}, +)$, но не и $(\mathbb{Z}, -)$

$< M, *, e_* >$ се нарича моноид iff $< M, * >$ е полугрупа & $(\forall\, a \in M)(a*e_* = a = e_**a)$
Например: $(\mathbb{N}, +, 0)$, но не и $(\mathbb{N}, +, 1)$

$< M, *, e_* >$ се нарича абелев (комутативен) моноид iff
$< M, * >$ е моноид &$(\forall\, a,b\in M)(a*b=b*a)$
Например: $(\mathbb{N}, +, 0)$, но не и $(\mathcal{M}, \cdot, I)$ не е абелев моноид при $\mathcal{M}$ – множество от квадратните матрици от ред n, и I – единичната матрица от ред n.

$< M, *, e_* >$ се нарича група iff $< M, * >$ е моноид & $(\forall\, a \in M)(\exists\, \overline{a} \in M)(a*\overline{a} = e_* = \overline{a}*a)$
Например: $(\mathbb{Z}, +, 0)$ е група, но не са групи $(\mathbb{N}, +, 0)$ и $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$

$< M, *, e_* >$ се нарича абелева (комутативна) група iff $<M, * >$ е моноид & $(\forall\, a \in M)$
$(\exists\, \overline{a} \in M)(a*\overline{a} = e_* = \overline{a}*a)$

Например: $(\mathbb{Z}, +, 0)$ е комутативна група.

1972 – Рашова, Сковрон – алгоритмична логика
Волфганг Прат – динамична логика, логика на недетерминирани програми
1979 – пропозиционални динамични логики, Нишимура
1963 – Карл Адам Петри – place-transition nets / Petri nets

Интуиционистки размито тавтологично множество

V – оценъчна функция , например

$$V(a \vee \neg a) = \begin{cases} 1 \\ \max(a, 1-a) \\ \max(\alpha,\beta), \min(\alpha,\beta) \end{cases} \quad \text{, където } \alpha = V(a), \beta = V(\neg a)$$

Ще казваме, че едно множество е ИРТМ, ако $\mu_A(x) \geq \nu_B(x)$

Примерни твърдения

$A \rightarrow A$

$A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$(A \cap B) \rightarrow A$

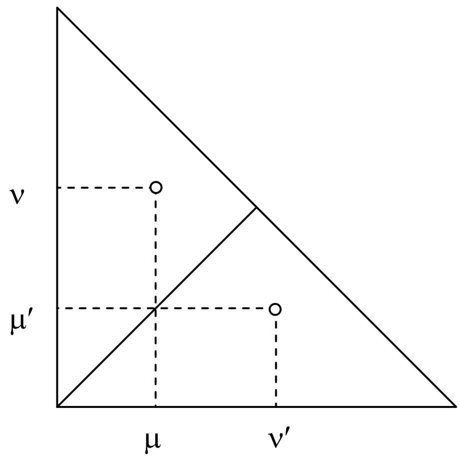
$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

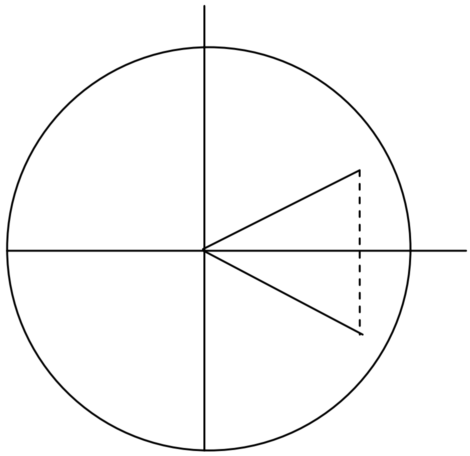
$A \rightarrow B = \{<x, \max(\mu_A(x), \nu_B(x)), \min(\nu_A(x), \mu_B(x))>\}$

Аксиома-схема на Мередит:

$((((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg D) \rightarrow C) \rightarrow E) \rightarrow ((E \rightarrow A) \rightarrow (D \rightarrow A))$

Установено е, че образите на x, ¬x в триъгълника могат да бъдат взаимноеднозначно трансформирани до две комплексно спрегнати точки в единичния кръг на комплексната равнина.





Модални оператори

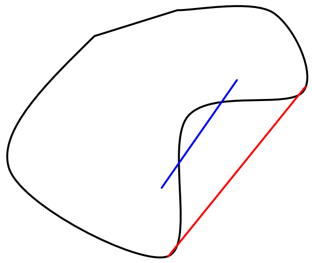
$\square A = \{< x, \mu_A, 1-\mu_A > | \; x \in E\}$

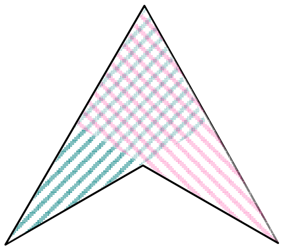
$\lozenge A = \{< x, 1-\nu_A, \nu_A > | \; x \in E\}$

Твърдения (аксиоми на модалната логика):

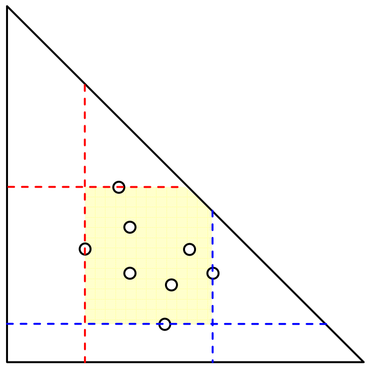
$\square A \subseteq A \subseteq \lozenge A$	$\neg\square\neg A = \lozenge A$ $\neg\lozenge\neg A = \square A$	$\square(A \cap B) = \square A \cap \square B$ $\square(A \cup B) = \square A \cup \square B$ $\square(A\ @\ B) = \square A\ @\ \square B$	$\lozenge(A \cap B) = \lozenge A \cap \lozenge B$ $\lozenge(A \cup B) = \lozenge A \cup \lozenge B$ $\lozenge(A\ @\ B) = \lozenge A\ @\ \lozenge B$	$\square\square A = \square A$ $\lozenge\square A = \square A$ $\square\lozenge A = \lozenge A$ $\lozenge\lozenge A = \lozenge A$

В топологията има два оператора – изпъкнала обвивка и вътрешност, можем да намерим тяхни аналози и в ИРМ.





Най-малката изпъкнала обвивка е единствена, докато могат да съществуват различни най-големи изпъкнали вътрешности.



$$C(A) = \{x, \sup_{y \in E} \mu_A(x), \inf_{y \in E} \nu_A(y) \mid x \in E\}$$

$$I(A) = \{x, \inf_{y \in E} \mu_A(x), \sup_{y \in E} \nu_A(y) \mid x \in E\}$$

$I(A) \subset A \subset C(A)$
$C(C(A)) = C(A)$
$I(I(A)) = I(A)$
$\neg I(\neg A) = C(A)$
$\neg C(\neg A) = I(A)$

$C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$
$C(A \cap B) = C(A) \cap C(B)$

$\Box C(\Box A) = \Diamond C(\Box A) = \neg\Box I(\Diamond\neg A) = \neg\Diamond I(\Diamond\neg A)$

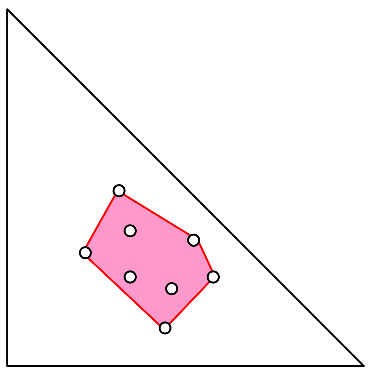
Ще наричаме множество A:

- S-нормално, ако C(A) съвпада с целия универсум E*
- I-нормално, ако I(A) съвпада с O*

където

$E^* = \{\langle x, 1, 0\rangle \mid x \in E\}$ (пълна принадлежност = универсум)
$O^* = \{\langle x, 0, 1\rangle \mid x \in E\}$ (пълна непринадлежност)
$U^* = \{\langle x, 0, 0\rangle \mid x \in E\}$ (пълна неопределеност)

Топологични оператори, явяващи се разширения на C, I. Действат по-фино, по-фино приближават точките.



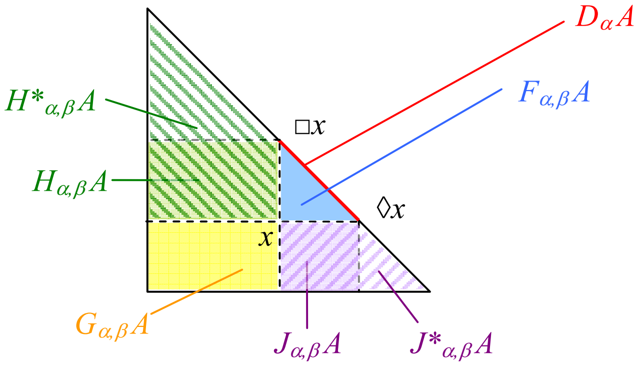
$$C_\mu C_\nu A = C_\nu C_\mu A = CA$$

$$CA \subset \begin{Bmatrix} C_\mu A \\ C_\nu A \end{Bmatrix} \subset A \subset \begin{Bmatrix} I_\mu A \\ I_\nu A \end{Bmatrix} \subset IA$$

Разширения на модалните оператори над ИРМ

$\square A = \{< x, \mu_A, 1\text{-}\mu_A > | x \in E\}$
$\lozenge A = \{< x, 1\text{-}\nu_A, \nu_A > | x \in E\}$

$$D_\alpha A = \{< x, \mu + \alpha\pi, \nu + (1-\alpha)\pi > | x \in E\}$$



$$F_{\alpha,\beta}(A) = \{< x, \mu + \alpha\pi, \nu + \beta\pi > | x \in E\}$$

Нека за $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0;1]$ е в сила, че $\alpha + \beta \leq 1, \gamma + \delta \leq 1$. Тогава,

$$\begin{aligned}
& F_{\alpha,\beta}(F_{\gamma,\delta}(A)) \\
&= F_{\alpha,\beta}(\{\langle x, \mu_A(x) + \gamma.\pi_A(x), \\
&\quad \nu_A(x) + \delta.\nu_A(x)\rangle | x \in E\}) \\
&= \{\langle x, \mu_A(x) + \gamma.\pi_A(x) + \alpha.(1 - \mu_A(x) - \gamma.\pi_A(x) - \nu_A(x) - \delta.\pi_A(x)), \\
&\quad \nu_A(x) + \delta.\pi_A(x) + \beta.(1 - \mu_A(x) \\
&\quad -\gamma.\pi_A(x) - \nu_A(x) - \delta.\pi_A(x))\rangle | x \in E\} \\
&= \{\langle x, \mu_A(x) + (\alpha + \gamma - \alpha.\gamma - \alpha.\delta).\pi_A(x), \\
&\quad \nu_A(x) + (\beta + \delta - \beta.\gamma - \beta.\delta).\pi_A(x)\rangle | x \in E\} \\
&= F_{\alpha+\gamma-\alpha.\gamma-\alpha.\delta,\beta+\delta-\beta.\gamma-\beta.\delta}(A)
\end{aligned}$$

$$\neg F_{\alpha,\beta}(\neg A) = F_{\beta,\alpha} A$$

Базисни двойки от оператори – 6

(D, G) (F, G) (H, J) (H*, J) (H, J*) (H*, J*)

Базисни тройки от оператори – 25

(D, F, G),	(D, G, H),	(D, G, H^*),	(D, G, J),	(D, G, J^*),
(D, H, J),	(D, H, J^*),	(D, H^*, J),	(D, H^*, J^*),	(F, G, H),
(F, G, H^*),	(F, G, J),	(F, G, J^*),	(F, H, J),	(F, H, J^*),
(F, H^*, J),	(F, H^*, J^*),	(G, H, J),	(G, H, J^*),	(G, H^*, J),
(G, H^*, J^*),	(H, H^*, J),	(H, H^*, J^*),	(H, J, J^*),	(H^*, J, J^*).

Само две четворки от оператори **не** са базисни: (D, F, H, H*), (D, F, J, J*)

Всеки пет оператора, които си вземем, са базисни.

Твърдения

(a) $C(H_{\alpha,\beta}(A)) \subseteq H_{\alpha,\beta}(C(A))$,

(b) $I(H_{\alpha,\beta}(A)) \supseteq H_{\alpha,\beta}(I(A))$,

(c) $C(H^*_{\alpha,\beta}(A)) \subseteq H^*_{\alpha,\beta}(C(A))$,

(d) $I(H^*_{\alpha,\beta}(A)) \supseteq H^*_{\alpha,\beta}(I(A))$,

(e) $C(J_{\alpha,\beta}(A)) \subseteq J_{\alpha,\beta}(C(A))$,

(f) $I(J_{\alpha,\beta}(A)) \supseteq J_{\alpha,\beta}(I(A))$,

(g) $C(J^*_{\alpha,\beta}(A)) \subseteq J^*_{\alpha,\beta}(C(A))$,

(h) $I(J^*_{\alpha,\beta}(A)) \supseteq J^*_{\alpha,\beta}(I(A))$.

Оператор, включващ всички като частни случаи

$X_{a,b,c,d,e,f}A = \{< x, a\mu + b(1-\mu - c\nu), d\nu + e(1 - f\mu - \nu) >| x \in E\}$

където $a + e - e.f \leq 1, b + d - b.c \leq 1$

Частни случаи: $\Box A = X_{1,0,\nu,1,1,1}A$, $\Diamond A = X_{1,1,1,1,0,\nu}A$, $D_\alpha A = X_{1,\alpha,1,1,1-\alpha,1}A$

$\neg X_{a,b,c,d,e,f} \neg A = X_{d,e,f,a,b,c}$

Може ли да се намери обобщение на $X_{a,b,c,d,e,f}$ с по-малко от 6 аргумента? По-скоро не.

Нови оператори, получени с разместване местата на μ и ν:

$$d_\alpha(A) = \{\langle x, \nu_A(x) + \alpha.\pi_A(x), \mu_A(x) + (1-\alpha).\pi_A(x)\rangle \mid x \in E\};$$
$$f_{\alpha,\beta}(A) = \{\langle x, \nu_A(x) + \alpha.\pi_A(x), \mu_A(x) + \beta.\pi_A(x)\rangle \mid x \in E\}, \text{ where } \alpha + \beta \leq 1;$$
$$g_{\alpha,\beta}(A) = \{\langle x, \alpha.\nu_A(x), \beta.\mu_A(x)\rangle \mid x \in E\};$$
$$h_{\alpha,\beta}(A) = \{\langle x, \alpha.\nu_A(x), \mu_A(x) + \beta.\pi_A(x)\rangle \mid x \in E\};$$
$$h^*_{\alpha,\beta}(A) = \{\langle x, \alpha.\nu_A(x), \mu_A(x) + \beta.(1 - \alpha.\nu_A(x) - \mu_A(x))\rangle \mid x \in E\};$$
$$j_{\alpha,\beta}(A) = \{\langle x, \nu_A(x) + \alpha.\pi_A(x), \beta.\mu_A(x)\rangle \mid x \in E\};$$
$$j^*_{\alpha,\beta}(A) = \{\langle x, \nu_A(x) + \alpha.(1 - \nu_A(x) - \beta.\mu_A(x)), \beta.\mu_A(x)\rangle \mid x \in E\};$$

Твърдения:

- $d_\alpha d_\alpha A \to A$ е вярно, но $A \to d_\alpha d_\alpha A$ не е вярно
- $A \to g_\alpha g_\alpha A$ е вярно, но $g_\alpha g_\alpha A \to A$ не е вярно

Нека едно множество наречем тавтологично, ако всичките му $\mu(x)$ са 1, а всичките $\nu(x)$ са нули.

$\text{Insg}(A,B)=\{<x, 1-(1-\mu_B(x)).\text{sg}(\mu_A(x) - \mu_B(x)), \nu_B(x).\text{sg}(\mu_A(x) - \mu_B(x)).\text{sg}(\nu_B(x) - \nu_A(x)) >\}$

където

$sg(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$, $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

Всички множества:

(a) $Insg(A, f_{\alpha,\beta} f_{\alpha,\beta}(A))$,

(b) $Insg(g_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta}(A), A)$

(c) $Insg(A, j_{\alpha,1} j_{\alpha,1}(A))$,

(d) $Insg(h_{1,\beta} h_{1,\beta}(A), A)$

(e) $Insg(A, j^*_{\alpha,1} j^*_{\alpha,1}(A))$,

(f) $Insg(h^*_{1,\beta} h^*_{1,\beta}(A), A)$

са тавтологични.

$F_B A = \{<x, \mu_A + \mu_B \pi_A, \nu_A + \nu_B \pi_A >\}$
където $B = \{<x, \alpha, \beta> \mid x \in E\}$

$\Box A = d_{O^*}(A) = f_{O^*}(A)$,

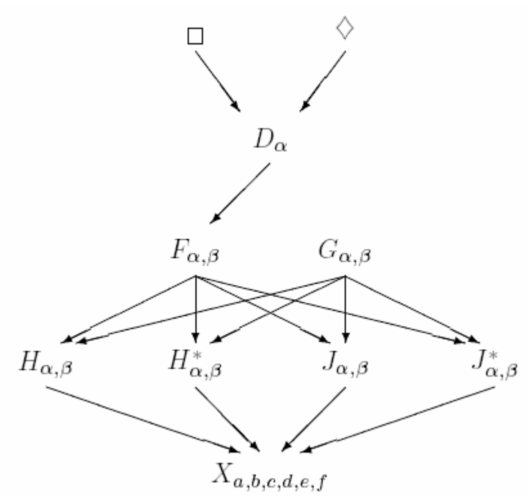
$\Diamond A = d_{E^*}(A) = f_{E^*}(A)$,

$P_{\alpha\beta} A = \{<x, \max(\mu_A, \alpha), \min(\nu_A, \beta) >\}$
$Q_{\alpha\beta} A = \{<x, \min(\mu_A, \alpha), \max(\nu_A, \beta) >\}$

Очевидно:

$P_{\alpha,\beta}(A) = A \cup \{\langle x, \alpha, \beta\rangle | x \in E\}$,
$Q_{\alpha,\beta}(A) = A \cap \{\langle x, \alpha, \beta\rangle | x \in E\}$,
$Q_{\alpha,\beta}(A) \subseteq A \subseteq P_{\alpha,\beta}(A)$.

Йерархия от операторите над ИРМ



$\boxtimes(A) = X_{1,0.5,0,0.5,0,r}$,

$\boxplus_\alpha(A) = X_{\alpha,0,r,1,1-\alpha,0}$,

$\boxtimes_\alpha(A) = X_{1,1-\alpha,0,\alpha,0,r}$,

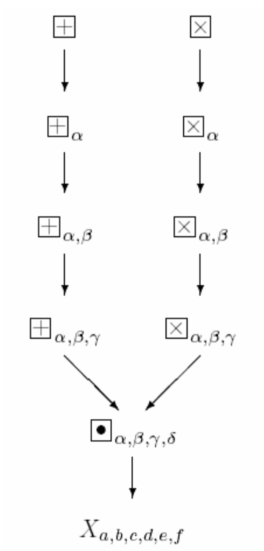
$\boxplus_{\alpha,\beta}(A) = X_{\alpha,0,r,\alpha+\beta,\beta,0}$,

$\boxtimes_{\alpha,\beta}(A) = X_{\alpha+\beta,\beta,0,\alpha,0,r}$,

$\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}(A) = X_{\alpha,0,r,\beta+\gamma,\gamma,0}$,

$\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}(A) = X_{\alpha+\gamma,\gamma,0,\beta,0,r}$,

$\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A) = X_{\alpha+\gamma,\gamma,0,\beta+\delta,\delta,0}$,



Норми и метрики в ИРМ

На всеки елемент може да се съпостави *норма* : $|| x || = 0$ *iff* $x = 0$
Обаче $|| x || = || y ||$ *iff* $x = y$ не винаги е вярно.
Псевдонорма. Ще казваме, че за два обекта е изпълнено:

$$\|x\| = \|y\| \quad iff \quad \mu_A(x) = \mu_B(x) \,\&\, \nu_A(x) = \nu_B(x)$$

$$\sigma_{1,A}(x) = \mu_A(x) + \nu_A(x)$$

$$\sigma_{1,A\cap B}(x) \geq \min(\sigma_{1,A}(x), \sigma_{1,B}(x))$$

$$\sigma_{2,A}(x) = \sqrt{\mu_A^2(x) + \nu_A^2(x)}$$ - Евклидова норма

Могат да се намерят две ИРМ, първото да е подмножество на второто, за всеки от елементите на които първите норми да съвпадат.

$$\sigma_{3,A}(x) = \frac{\mu + 1 - \nu}{2}$$ - Евклидова норма

$$n_\mu = \sum_x \mu_A(x)$$

Метрики

Метрики на Хеминг:

$$h_A(x,y) = \frac{1}{2}\left(| \mu(x) - \mu(y) | + | \nu(x) - \nu(y) |\right)$$

$$h_A(x,y) = \frac{1}{3}\left(| \mu(x) - \mu(y) | + | \nu(x) - \nu(y) | + | \pi(x) - \pi(y) |\right)$$

Метрики на Евклид:

$$e_A(x,y) = \sqrt{\frac{1}{2}\left((\mu(x) - \mu(y))^2 + (\nu(x) - \nu(y))^2\right)}$$

$$e_A(x,y) = \sqrt{\frac{1}{3}\left((\mu(x) - \mu(y))^2 + (\nu(x) - \nu(y))^2 + (\pi(x) - \pi(y))^2\right)}$$

Декартово произведение: Шест различни примера

$$A = \{< x, \mu_A(x), \nu_A(x) >| x \in E_1\}$$

$$B = \{< y, \mu_B(y), \nu_B(y) >| y \in E_2\}$$

$$A \times_1 B = \{<< x, y >, \mu_A(x).\mu_B(y), \nu_A(x).\nu_B(y) >| x \in E_1, y \in E_2\}$$

$$A \times_2 B = \{<< x, y >, \mu_A(x) + \mu_B(y) - \mu_A(x).\mu_B(y), \nu_A(x).\nu_B(y) >| x \in E_1, y \in E_2\}$$

$$A \times_3 B = \{<< x, y >, \mu_A(x).\mu_B(y), \nu_A(x) + \nu_B(y) - \nu_A(x).\nu_B(y) >| x \in E_1, y \in E_2\}$$

$$A \times_4 B = \{<< x, y >, \max(\mu_A(x), \mu_B(y)), \min(\nu_A(x), \nu_B(y)) >| x \in E_1, y \in E_2\}$$

$$A \times_5 B = \{<< x, y >, \min(\mu_A(x), \mu_B(y)), \max(\nu_A(x), \nu_B(y)) >| x \in E_1, y \in E_2\}$$

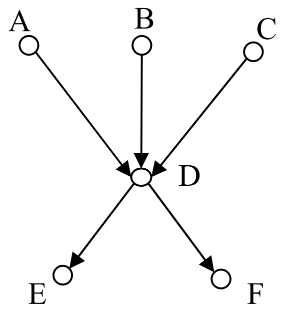
$$A \times_6 B = \{<< x, y >, \frac{\mu_A(x) + \mu_B(y)}{2}, \frac{\nu_A(x) + \nu_B(y)}{2} >| x \in E_1, y \in E_2\}$$

Интуиционистки размити релации

Нека $\circ$ е едно от горните шест декартови произведения
$R = \{<< x, y >, \mu_R(x, y), \nu_R(x, y) > | x \in E_1, y \in E_2\}$
R се нарича $\circ$-интуиционистки размита релация, ако $\mu_R(x, y), \nu_R(x, y)$ имат вида на компонентите на операция $\circ$.

Пример за интуиционистки размит граф

На всяка от дъгите му съответства ИР двойка числа.

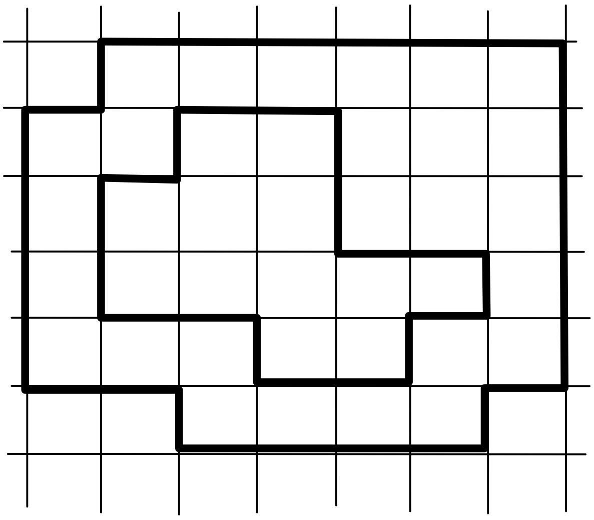


	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A	0	0	0	1	0	0
B	0	0	0	1	0	0
C	0	0	0	1	0	0
D	0	0	0	0	1	1
E	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0

Разширения на размитите множества

1965 – Размити множеста, Лотфи Заде
1967 – L-fuzzy sets, L-размити множества, Джоузеф Гоген
1972 – Rough sets, Здислав Павлак
1983 – Интуиционистки размити множества
1986 – Размити множества с интервални стойности

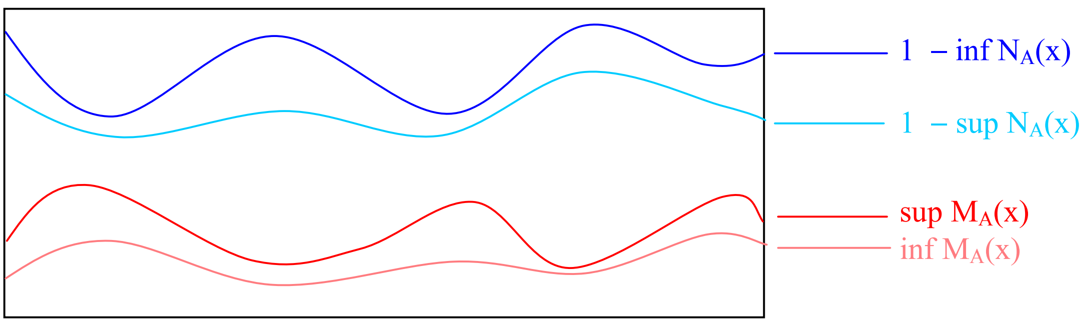
Rough sets



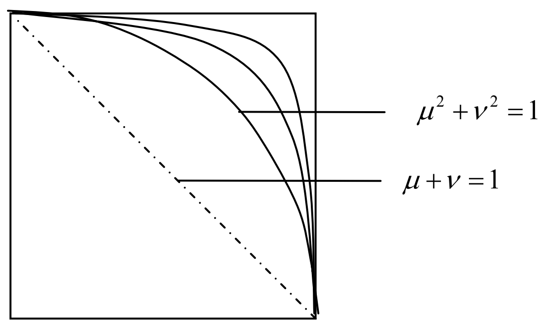
L-размити множества
ИРМ може да се представя като представител на всички L-размити множества.

Размити множества с интервални стойности, Interval-valued FS
Щом има интервал, този интервал има inf $\mu_A(x)$ и sup $\mu_A(x)$
Ако положим, че $\mu_A(x)$ = inf $\mu_A(x)$, а 1 - $\nu_A(x)$ = sup $\mu_A(x)$, ще получим IVFS = IFS

ИРМ с интервални стойности – разширение на ИРМ по идеята за IVFS
$\{\langle x, M_A(x), N_A(x)\rangle\}$
Където M и N са цели интервали, в които варират съответно $\mu_A(x)$ и $\nu_A(x)$.



Разширение от клас p на ИРМ
Представя се като $0 \le \mu^p + \nu^p \le 1$.
В случая на $p = 2$, $0 \le \mu^2 + \nu^2 \le 1$, триъгълникът се изражда до четвърт от окръжност.

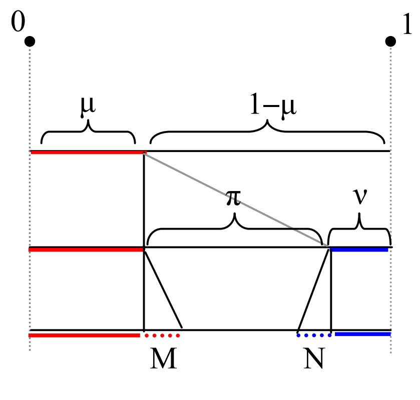


Темпорални ИРМ
Друго разширение е свързано с появата на време:
$A(T) = \{<x, \mu_A(x,t), \nu_A(x,t)> \mid x \in E, t \in T\}$

ТемпИРМ са удачни когато искаме да проследим даден процес в развитие.

Многомерни ИРМ
$\mu_A(x, t_1, t_2, \ldots, t_s)$, $\nu_A(x, t_1, t_2, \ldots, t_s)$

ИРМ със степен на противоречие
$\{<x, \mu_A(x), \nu_A(x), \gamma_A(x)> \mid x \in E\}$



Индексирани матрици

При обикновените матрици не могат да се събират и умножават матрици с произволни размерности. Затова се налага да се въведе понятието *индексирана матрица*, която има вида:

$$\begin{array}{c|ccc} & l_1 & \cdots & l_n \\ \hline k_1 & a_{k_1 l_1} & \cdots & a_{k_1 l_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_m & a_{k_m l_1} & \cdots & a_{k_m l_n} \end{array}$$

Операции

1. Събиране

Пример:

$$\begin{array}{c|cc} & d & e \\ \hline a & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{array} \oplus \begin{array}{c|ccc} & f & g & d \\ \hline a & 10 & 11 & 12 \\ p & 13 & 14 & 15 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & d & e & f & g \\ \hline a & 13 & 2 & 10 & 11 \\ b & 3 & 4 & 0 & 0 \\ c & 5 & 6 & 0 & 0 \\ p & 15 & 0 & 13 & 14 \end{array}$$

Формула:

$$[K, L, \{a_{k_i l_j}\}] \oplus [P, Q, \{b_{p_r q_s}\}] = [K \cup P, L \cup Q, \{c_{u_v w_t}\}]$$

$$c_{u_v w_t} = \begin{cases} a_{k_i l_j} & \textit{ако поне един от двата индекса принадлежи само на първата матрица} \\ b_{p_r q_s} & \textit{ако поне един от двата индекса принадлежи само на втората матрица} \\ a_{k_i l_j} + b_{p_r q_s} & \textit{ако всеки от двата индекса принадлежи и на двете матрици} \\ 0 & \textit{в противен случай} \end{cases}$$

при числови изрази

$$c_{u_v w_t} = \begin{cases} a_{k_i l_j} \\ b_{p_r q_s} \\ \max\left(a_{k_i l_j}, b_{p_r q_s}\right) \\ 0 \end{cases} \quad \textit{при (0,1) - матрици}$$

$$c_{u_v w_t} = \begin{cases} a_{k_i l_j} \\ b_{p_r q_s} \\ a_{k_i l_j} \vee b_{p_r q_s} \\ \textit{false} \end{cases} \quad \textit{при матрица, чиито елементи са предикати}$$

2. Почленно умножение на матрици

$[K,L,\{a_{k_i l_j}\}]\otimes[P,Q,\{b_{p_r q_s}\}]=[K\cap P, L\cap Q,\{c_{u_v w_t}\}]$

$c_{u_v w_t}=a_{k_i l_j}.b_{p_r q_s}$ *при числови изрази*

$c_{u_v w_t}=\min\left(a_{k_i l_j},b_{p_r q_s}\right)$ *при (0,1) - матрици*

$c_{u_v w_t}=a_{k_i l_j}\wedge b_{p_r q_s}$ *при матрица, чиито елементи са предикати*

3. Матрично умножение

Пример:

$$\begin{array}{c|ccc} & d & e & f \\ \hline a & 1 & 2 & 7 \\ b & 3 & 4 & 8 \\ c & 5 & 6 & 9 \end{array} \odot \begin{array}{c|c} & p \\ \hline d & 10 \\ e & 11 \\ g & 12 \\ h & 13 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & f & p \\ \hline a & 7 & 1.10+2.11 \\ b & 8 & 3.10+4.11 \\ c & 9 & 0 \\ g & 0 & 12 \\ h & 0 & 13 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & f & p \\ \hline a & 7 & 32 \\ b & 8 & 74 \\ c & 9 & 0 \\ g & 0 & 12 \\ h & 0 & 13 \end{array}$$

Формула:

$[K,L,\{a_{k_i l_j}\}]\odot[P,Q,\{b_{p_r q_s}\}]=[K\cup(P-L),(L-P)\cup Q,\{c_{u_v w_t}\}]$

$$c_{u_v w_t}=\begin{cases} a_{k_i l_j} & \text{ако вторият индекс принадлежи само на първата матрица} \\ b_{p_r q_s} & \text{ако първият индекс принадлежи само на втората матрица} \\ \sum\limits_{l_j=p_r\in L\cap P} a_{k_i l_j}.b_{p_r q_s} & \text{ако има втори индекси на } I^{вата} \text{ м., които съвпадат с първи индекси на } II^{рата} \text{ м.} \\ 0 & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

при числови изрази

$$c_{u_v w_t}=\begin{cases} a_{k_i l_j} \\ b_{p_r q_s} \\ \max\limits_{l_j=p_r\in L\cap P}\left(\min\left(a_{k_i l_j},b_{p_r q_s}\right)\right) \\ 0 \end{cases}$$ *при (0,1) - матрици*

$$c_{u_v w_t}=\begin{cases} a_{k_i l_j} \\ b_{p_r q_s} \\ \bigvee\limits_{l_j=p_r\in L\cap P}(a_{k_i l_j}\wedge b_{p_r q_s}) \\ false \end{cases}$$ *при матрица, чиито елементи са предикати*

4. Умножение с константа

$\alpha.[K, L, a_{k_i l_j}] = [K, L, \{\alpha.a_{k_i l_j}\}]$

5. Почленно изваждане

$A - B = A \oplus (-1).B$

6. Структурно изваждане

$A \ \Theta \ B = [K - P, L - Q, \{c_{u_v w_t}\}]$

Нулева и празна матрица: $I_0 = [K, L, \{0\}]$, $I_\varnothing = [\varnothing, \varnothing, \{a_{k_i l_j}\}]$

Единична матрица: $I_1 = [K, L, \{1\}]$

Релации между матрици

$A = [K, L, \{a_{k_i l_j}\}]$
$B = [P, Q, \{b_{p_r q_s}\}]$
Включване относно размерност (строго и нестрого)
$A \subset_d B \quad iff \quad ((K \subset P \wedge L \subset Q) \vee (K \subseteq P \wedge L \subset Q) \vee (K \subset P \wedge L \subseteq Q)) \wedge (\forall k \in K)(\forall l \in L)(a_{kl} = b_{kl})$
$A \subseteq_d B \quad iff \quad (K \subseteq P) \wedge (L \subseteq Q) \wedge (\forall k \in K)(\forall l \in L)(a_{kl} = b_{kl})$

Включване относно стойност (строго и нестрого)
$A \subset_v B \quad iff \quad (K = P) \wedge (L = Q) \wedge (\forall k \in K)(\forall l \in L)(a_{kl} < b_{kl})$
$A \subseteq_v B \quad iff \quad (K = P) \wedge (L = Q) \wedge (\forall k \in K)(\forall l \in L)(a_{kl} \le b_{kl})$

Включване (строго и нестрого)
$A \subset_d B \vee A \subset_v B \rightarrow A \subset B$

7. Отстраняване само на ред или само на стълб
$A_k = [K - \{k\}, L, ...]$
$A_l = [K, L - \{l\}, ...]$

Обобщение: Минор на матрица (отстраняване на ред и стълб, едновременно)
$A_{(k,l)} = [K - \{k\}, L - \{l\}, \{c_{u_v w_t}\}]$

Теорема: А е подматрица на В, т.е. $A \subseteq B \quad iff \quad A = B_{(P-K, Q-L)}$

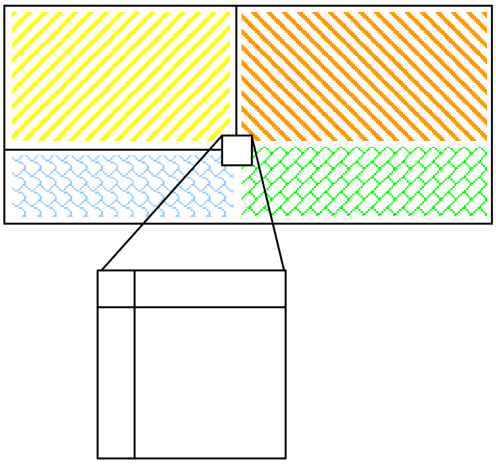
$A_{(K,L)} = I_\varnothing, A_{(\varnothing,\varnothing)} = A$

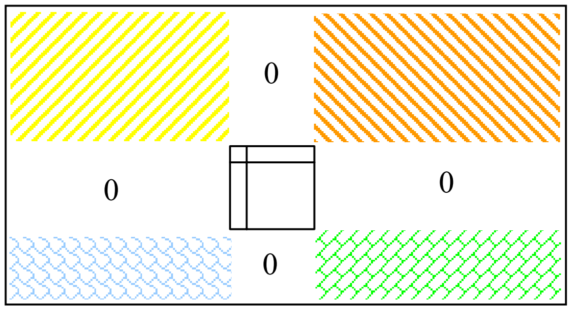
8. Операция проекция

$pr_{M,N} A = [M, N, \{...\}]$

Теорема: Ако $M_1 \subset M_2 \subset K$ и $N_1 \subset N_2 \subset L$, то $pr_{M_1,N_1} pr_{M_2,N_2} A = pr_{M_1,N_1} A$

9. Вложение на матрица в матрица





10. Субституция

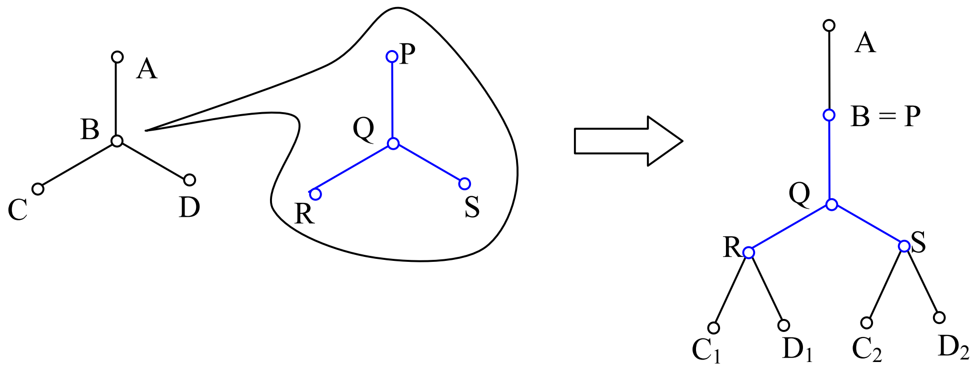
$$\left[\frac{p}{q}\right] A = [(K - \{k\}) \cup \{p\}, L, \{...\}]$$

$$\left[\frac{p\ q}{k\ l}\right] A = [(K - \{k\}) \cup \{p\}, (L - \{l\}) \cup \{q\}, \{...\}]$$

Теорема 10.1: $\left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{q}{p}\right] A = A$

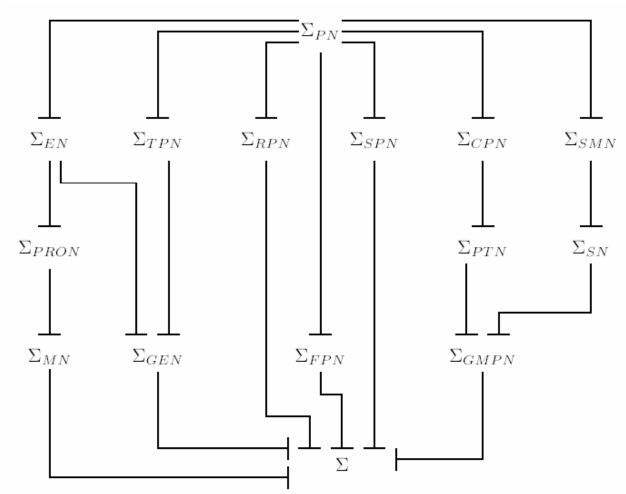
Теорема 10.2: $\left[\frac{p_2\ q_2}{p_1\ q_1}\right]\left[\frac{p_1\ q_1}{p\ q}\right] A = \left[\frac{p_2\ q_2}{p\ q}\right] A$

Приложение в теория на графите



Обобщени мрежи

Исторически преглед



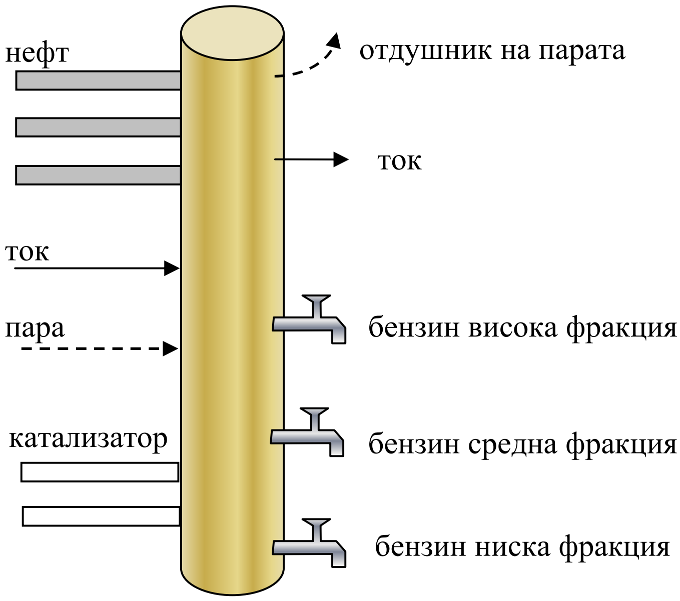
- Мрежи на Петри (Petri nets, PN), 1962 – Карл-Адам Петри
- Е-мрежи (EN), 1972, Нът
- Мрежи на Петри с време (Time Petri net, TPN), 1973, Рамчандани
- Буферно-преходни мрежи, 1975, Ханс Фус
- Редуцирани Мрежи на Петри (Reduced Petri nets, RPN), 1978, Вадим Котов
- Цветни мрежи на Петри (Color Petri nets, CPN), 1977

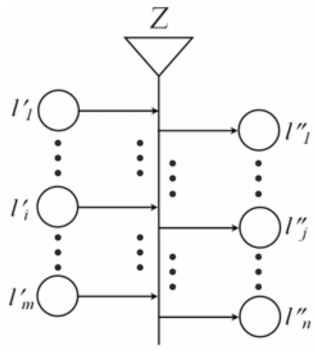
  Имаме ядра в някакви цветове, които преминават в друга позиция, където си сменят цвета – Зербос, Ирани (САЩ)

  Шиферс, Веде (Германия): ядра с много цветове, които преминават по дъги, които им съответстват на цветовете

  Карл Йенсен обобщава двата подхода. Важното и в двата случая е, че ядрата не помнят своята история, т..е веднъж като си сменят цвета забравят какъв е бил той дотогава.
- Генриш, Лаутенбах – по много дъги между позиция и преход. Сменят алгоритмите за движение на ядрата.
- Предикатно-преходни мрежи (Predicate-Transition nets, PTN), 1979, Генриш, Лаутенбах, Тайгарян – обобщение на Цветни мрежи на Петри, но не с цветове, а със символи.
- През 1979 г., само в рамките на 3 месеца излизат два труда – стохастична мрежа на Петри (Stochastic Petri nets, SPN) – Стефан Шапиро / Стефан Наткин. Стохастична мрежа точно описва верига на Марков (и обратно).
- 1975, Рюдигер Фалк, Самомодифициращи се МП (Self-modifying Petri nets, SMN). За първи път дъга изчезва и се появява. 1983 това понятие е разширено като „супер-мрежи” (Super-nets, SN) – инхибиторни дъги, поглъщат ядрата, които иначе трябва да преминат през нея.
- ОМП + предикатно преходни мрежи = обобщена модифицирана МП (Generalized Modified Petri nets, GMPN)= супермрежи
- 1981, М-мрежа (M-net, MN). Грюцнер доказва еквивалентност на М-мрежа и обобщена е-мрежа (Generalized E-net, GEN).
- Обобщени мрежи – обобщени на всички разширения на мрежите на Петри
- Размити мрежи на Петри (Fuzzy Petri nets, FPN)

Пример, ректификационна колона: $\wedge(\vee(n_1, n_2, n_3), t, p, \vee(k_1, k_2))$





Дефиниция на преход

Преход, входни и изходни позиции
$Z = \langle L', L'', t_1, t_2, r, M, \square \rangle$
Където

- L' - множество на входните позиции
- L'' - множество на изходните позиции
- r е индексирана матрица на предикатите (тя е която дава много силни моделиращи възможности)
- M е матрица, задаваща броя на ядрата, които могат да минат от i-тия вход към j-тия изход
- $\square$ е булев тип на прехода, от вида в примера по-горе: $\wedge(\vee(n_1, n_2, n_3), t, p, \vee(k_1, k_2))$

Ядрата могат да се сливат / разцепват, ако е разрешено, или не, ако е забранено.

Дефиниция на цяла обощена мрежа

$\boldsymbol{E} = \langle \langle \mathbf{A}, \pi_A, \pi_L, \mathbf{c}, \boldsymbol{f}, \theta_1, \theta_2 \rangle, \langle \mathbf{K}, \pi_K, \theta_K \rangle, \langle \mathbf{T}, \mathbf{t}^0, \mathbf{t}^* \rangle, \langle \mathbf{X}, \Psi, \mathbf{b} \rangle \rangle$

Статични компоненти на мрежата

- A – множество от преходите
- π_A– функция, задаваща приоритети на преходите
- π_L – функция, задаваща приоритети на позициите
- c – капацитет на позициите
- f е функция, която оценява стойността на предикатите в r, била в стойностите {0,1} или в интервала [0;1] или в множеството [0;1]x[0;1]

- θ_1 – функция, която задава следващият момент, когато даден преход ще се активира; стойността се преизчислява в момента, когато преходът престане да бъде активен.
- θ_2 – функция, която задава продължителността на активното състояние

Динамични компоненти на мрежата
- K – множеството на ядрата
- π_K – функция, задаваща приоритети на ядрата
- θ_K – функция, задаваща момента от време, когато дадено ядро ще постъпи в мрежата

Времеви компоненти в модела, спрямо въведена глобална времева скала
- T – моментът от време, когато мрежата започва да функционира
- t^o – елементарна времева стъпка на скалата
- t^* – общата продължителност на функциониране на мрежата

Характеристични компоненти / Памет на модела
- X – множество от начални характеристики, които ядрата могат да придобият при началното си постъпване в мрежата
- Ψ – характеристична функция, която задава нови характеристики на ядрата при преминаването им през даден преход
- *b* – колко най-много характеристики да се пазят за едно ядро.
    - $b = 0$ – не помни никакви характеристики
    - $b = 1$ – помни само текущата характеристика
    - $b = k$ – помни само последните k на брой характеристики
    - $b = \infty$ – всички характеристики се помнят

Редуцирани обобщени мрежи

На практика много от реалните приложения не използват всички компоненти на ОМ. Със Σ класът на всички Редуцирани ОМ. Празни са множествата на мрежи, на които са махнати преходите, позициите или дъгите.

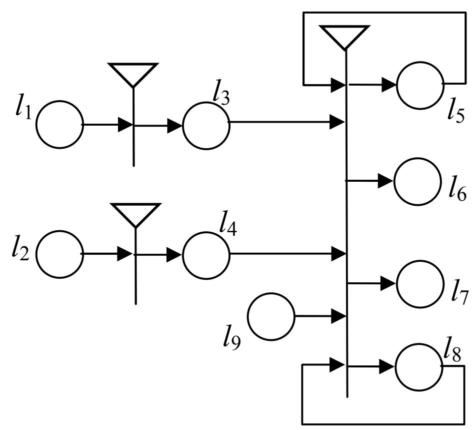
Пример 1: Плитка от две редици, подобна на редицата на Фибоначи

$$\alpha_0 = a, \alpha_1 = b$$

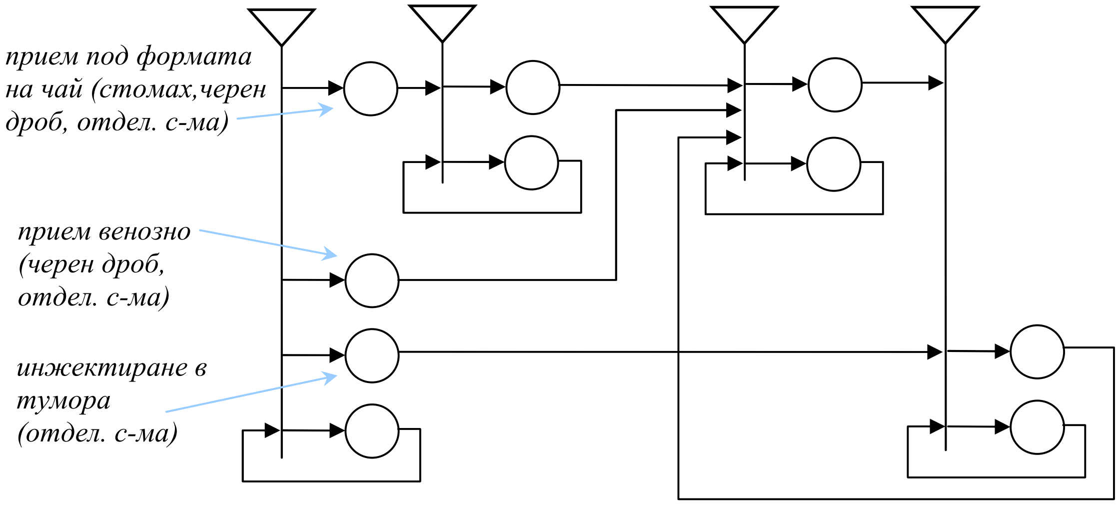
$$\beta_0 = c, \beta_1 = d$$

$$\begin{cases} \alpha_{n+2} = \beta_n + \beta_{n+1} \\ \beta_{n+2} = \alpha_n + \alpha_{n+1} \end{cases}$$

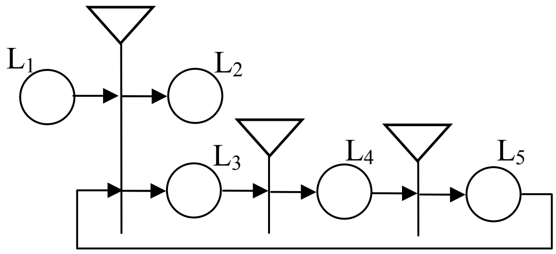
	l_5	l_6	l_7	l_8
l_3	W_1	$\neg W_1$	f	f
l_4	f	f	$\neg W_1$	W_1
l_9	f	f	f	f
l_5	W_1	$\neg W$	$\neg W$	f
l_8	f	f	f	W_1



Пример 2: Приложение на билката котешка стъпка



Теорема: Всяка машина на Тюринг може да се опише само с една ОМ. Да се намерят примери за процеси, които могат да се опишат с ОМ, но не могат да се опишат с машина на Тюринг.



В L_1 влиза ядро с начална характеристика запис върху лентата на машината на Тюринг. Ако този запис съответства на заключителна характеристика, ядрото отива в позиция L_2, в противен случай – в позиция L_3, където получава характеристика „Главата на машината на Тюринг трябва или да се премести наляво, или надясно". Ядрото отива в позиция L_4, където получава като нова характеристика символа, който трябва да се запише в клетката, над която е главата. В позиция L_5 ядрото получава като характеристика записът на лентата с вече променения символ. Връщаме се към преход Z_1.

Разширения на ОМ

1. Интуиционистки размити обобщени мрежи от няколко вида

ИРОМ – 1 вид, в която оценяваме степента на вярност и невярност на предикатите. Има общо пет варианта за оценяването

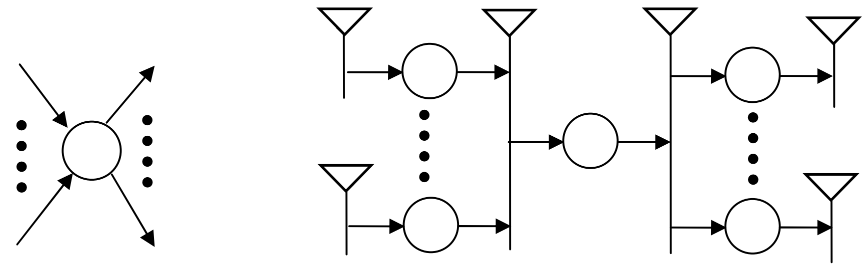
1. $\mu = 1, \nu = 0$
2. $\mu \geq ½$
3. $\mu \geq \nu$
4. $\mu > 0$
5. $\nu < 1$

ИРОМ – 2 вид. Да се откажем от ядрата като дискретни обекти, а да ги заменим с количества течности, които протичат из мрежата. Какво да правим с характеристичната функция ? Решнието е ХФ да присвоява характеристики не на ядрата, а на позициите. На база историята на позициите да се възстановява историята на процеса.

ИРОМ – 3 / 4 вид – оценяване на вярностните стойности и на характеристиките / количествата течност, които са преминали.

2. ОМ с **интервал** (а не момент!) от време за активиране на преходите.

3. ОМ с множество дъги, влизащи или излизащи от позициите



4. ОМ с оптимизационна компонента

5. ОМ с авариен часовник

6. ОМ с условия за край

7. ОМ движеща се отзад напред

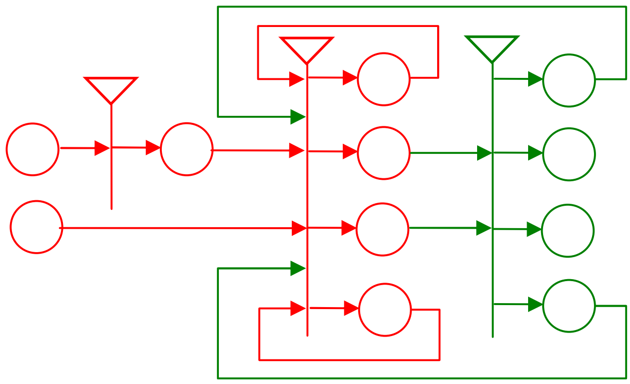
8. ОМ с неориентирани дъги

9. ОМ с ядра, имащи време за живот.

10. ОМ с променливи характеристики. ОМ при която ядрата получават като характеристики не числа, низове и т.н. стойности, а *променливи*.

11. ОМ с ядра, имащи обеми.

Пример. ОМ, която описва функционирането и резултата от работата на класическата мрежа на Петри.



Алгебричен аспект на ОМ

Операции върху преходи и върху цели мрежи

$Z_i = <L_i', L_i'', t_{i,1}, t_{i,2}, r_i, M_i, \square_i>$, $i = 1,2$

1. Обединение и сечение на преходи

$Z_1 \cup Z_2 = < L_1' \cup L_2', L_1'' \cup L_2'', \min(t_{i,1}, t_{i,2}), \max_i (t_{i,1} + t_{i,2}) - \min(t_{i1}, t_{i2}), r_1 \oplus r_2, M_1 \oplus M_2, \square_1 \cup \square_2 >$
$Z_1 \cap Z_2 = < L_1' \cap L_2', L_1'' \cap L_2'', \max(t_{i,1}, t_{i,2}), \min_i (t_{i,1} + t_{i,2}) - \max(t_{i1}, t_{i2}), r_1 \otimes r_2, M_1 \otimes M_2, \square_1 \cap \square_2 >$

$\min(t_{i,1}, t_{i,2})$	началото на резултатния преход при обединение
$\max(t_{i,1}, t_{i,2})$	началото на резултатния преход при сечение
$\max(t_{i,1}+t_{i,2}) - \min(t_{i1}, t_{i2})$	продължителността на резултатния преход при обединение
$\min(t_{i,1}+t_{i,2}) - \max(t_{i1}, t_{i2})$	продължителността на резултатния преход при сечение *(възможно е това число да се окаже и отрицателно и тогава такъв преход няма да съществува)*

2. Разлика на преходи – може да е некоректна операция

$Z_1 - Z_2 = < L_1' - L_2', L_1'' - L_2'', t_1, \min_i (t_{i,1} + t_{i,2}) - t_1, r_1 \ominus r_2, M_1 \ominus M_2, \square_1 \mid \square_2 >$

$\square_1 \mid \square_2$ означава, че всички променливи от втория преход трябва да се изхвърлят от първия

Пример: Нека $\square_1 = \vee(\wedge(l_1,l_2), \wedge(l_1,l_3,l_4))$ и нека входните позиции на втория преход са l_1 и l_5.
Тогава $\square_1 \mid \square_2 = \vee(\wedge(\cancel{l_1},l_2), \wedge(\cancel{l_1},l_3,l_4)) = \vee(\cancel{\wedge}(l_2), \wedge(l_3,l_4)) = \vee(l_2, \wedge(l_3,l_4))$

3. Композиция на преходи

$Z_1 \circ Z_2 = < L_1' \cup (L_2' - L_1'), L_2'' \cup (L_1'' - L_2''), t_1, \max_i (t_{i,1} + t_{i,2}) - t_1, r_1 \odot r_2, M_1 \odot M_2, \vee(\square_1, \square_2^*) >$

където $\square_2^*$ *е* $\square_2$, от който се изхвърлят всички идентификатори на позиции, които са изходни за първия преход.

> Празен преход – няма входни или изходни позиции, или продължителността на активното му състояние е отрицателно число; т.е. това е преход, който не може да бъде реализиран.

Операции над мрежи

1. Обединение на две мрежи

$$\left\langle \left\langle A_1 \mathbin{\bar\cup} A_2, \pi_{A_1} \cup \pi_{A_2}, \ldots \right\rangle, \langle \ldots \rangle, \left\langle \min(T_1,T_2), НОД(t_1^\circ, t_2^\circ), \max_i \left(T_i + \frac{t_i^\circ . t_i^*}{НОД(t_1^\circ, t_2^\circ)} \right) - \min(T_1,T_2) \right\rangle, \langle \ldots \rangle \right\rangle$$

където

- $НОД(t_1^\circ, t_2^\circ)$ е най-големият общ делител на двете елементарни времеви стъпки
- $A_1 \mathbin{\bar\cup} A_2 = \bigcup_{i=1}^{2} \{Z_i \mid Z_i \in A_i \;\&\; Z_i \neq A_{3-i}\} \cup \{Z \mid (\exists Z_1 \in A_1)(\exists Z_2 \in A_2)(Z_1 \cap Z_2 \neq Z_\phi)(Z = Z_1 \cup Z_2)\}$.

2. Композиция на две мрежи

$$E_1 \circ E_2 = \begin{cases} E_1 & \textit{ако } T_2 + t_2^* < T_1 \\ E_1 \geq E_2 & \textit{в противен случай} \end{cases}$$

Теорема: Ако Σ е класът на всички мрежи с операция обединение е комутативен моноид.

<u>Релации върху мрежи</u>

Имаме мрежа E, която работи върху ядро α с начална хар. x

1. Включване по извършена работа

$$E(\alpha,x) = \begin{cases} (\alpha,x) & \textit{ако } \alpha \notin K(E) \,\&\, x \notin X(K(E)) \\ (\alpha,y) & \textit{в противен случай} \end{cases}$$

→ пази се само последната характеристика: (,)

$$E\{\alpha,x\} = \begin{cases} (\alpha,x) & \textit{ако } \alpha \notin K(E) \,\&\, x \notin X(K(E)) \\ (\alpha,y_1,y_2,...,y_n) & \textit{в противен случай} \end{cases}$$

→ пази се пълната история: {,}

$E_1 \sqsubset E_2$ iff $(K(E_1) \subset K(E_2))$ & $(X(K(E_1)) \subset X(K(E_2)))$ &
& $(\forall \alpha \in K(E_1))$ $(\forall x \in X(K(E_1)))$ $(E_1(\alpha,x) = E_2(\alpha,x))$

$E_1 \sqsubset_* E_2$ iff $(K(E_1) \subset K(E_2))$ & $(X(K(E_1)) \subset X(K(E_2)))$ &
& $(\forall \alpha \in K(E_1))$ $(\forall x \in X(K(E_1)))$ $(\exists\, n_1,\ldots,n_s \in \mathbb{N}$ & $1 < n_1 < \ldots < n_s)$
$(E_1\{\alpha,x\} = \mathrm{pr}_{n1,\ldots,ns} E_2\{\alpha,x\})$

$E_1 \approx E_2$ iff $E_1 \sqsubset E_2$ & $E_2 \sqsubset E_1$

$E_1 \approx_* E_2$ iff $E_1 \sqsubset_* E_2$ & $E_2 \sqsubset_* E_1$

Топологичен аспект

1. Оператори за сложност

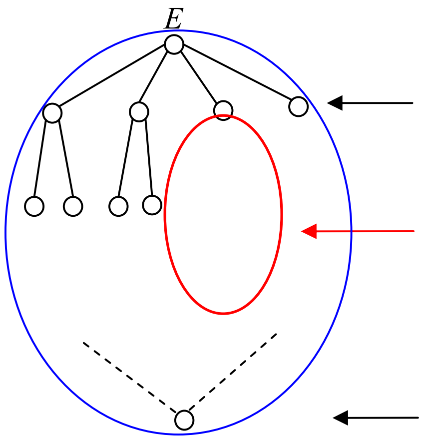
Борис Трахтенброт предлага понятието „сложност на Мрежа на Петри”, което е пренесено и към обобщените мрежи.

Пример: Дефинираме например следните оператори за сложност:

- Нека броят от преходите е φ_1(E)
- Броят на ядрата е φ_2(E)
- Продължителност на активното състояние φ_3(E)

Тези оператори съпоставят на всяка мрежа естествено число.

Филтър



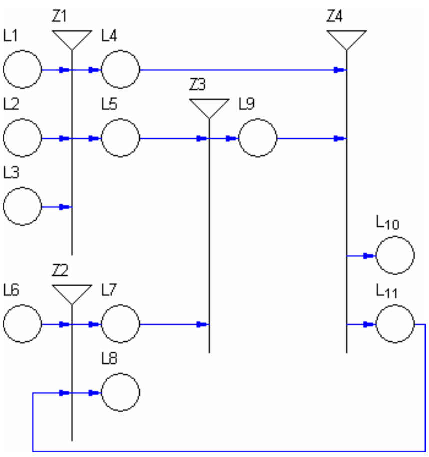
мрежи E_1, E_2,..., които вършат работата на E и са по-прости от E относно някой от операторите за сложност ИЛИ вършат само част от работата на E

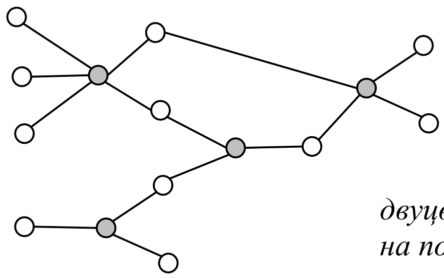
всички мрежи, които вършат същата работа като E и са по-прости от E относно някой от операторите за сложност, сред които избираме най-подходящата за конкретната цел

$E_\varnothing$ - празна мрежа, която не върши никаква работа

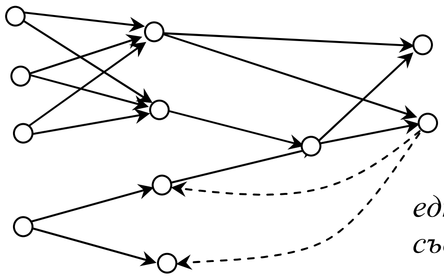
2. Граф-оператори

Съпоставят на всяка мрежа по един граф.

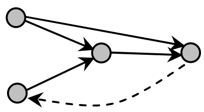




двуцветен граф, съответстващ на позициите и преходите



едноцветен ориентиран граф, съответстващ на позициите



едноцветен ориентиран граф, съответстващ на преходите

Пропозиционална динамична логика

данни ⟷ **програми**
начални характеристики *ядра*

компютри
мрежи

Операторен аспект

Видове оператори над обобщени мрежи

- глобални
- локални
- йерархични
- редуциращи
- разширяващи
- динамични

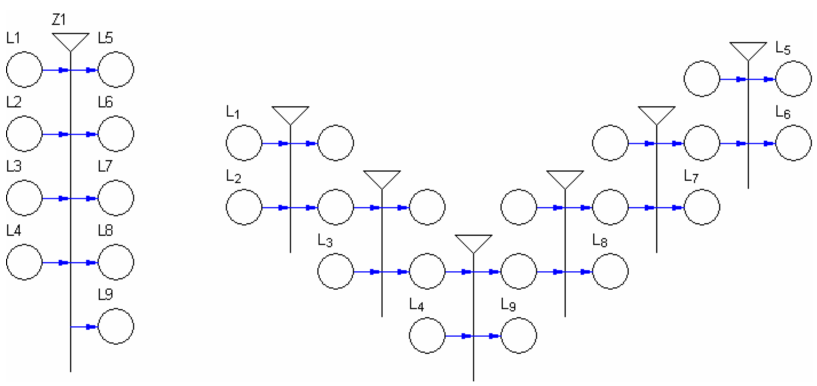
Друга класификация:

- оператори, които се прилагат преди функционирането на мрежата
- оператори, които се прилагат по време функционирането на мрежата
- оператори, които се прилагат след функционирането на мрежата

Глобални оператори

Глобалните оператори сменят глобални компоненти на мрежата, като ядра, приоритети, характеристични функции, глобални времеви параметри и тн. Какво може и какво не може да се сменя в дефиницията на мрежата по време на работата й? Например може да се сменя характеристичната функция. Може да се увеличи броя на пазените характеристики (може и да се намали, но дали ще е полезно). Не може да се намаля капацитетът на дъгите и на позициите, ако през тях са минали повече или в тях има повече ядра от желаната промяна. Могат да се сменят приоритетите и на ядрата, и на позициите, и на предикатите.

Пример:



Операторът $\mathcal{G}_1$, който съпоставя на даден преход с 4 входа и 5 изхода композиция от 6 прехода с по два входа и два изхода всеки

Редуциращи оператори

Показват от какъв клас редукция е дадената мрежа, наблюдавайки зададените за нея стойности на параметрите.

Динамични оператори

- определят стратегиите, по които се изчисляват предикатите
- разрешават/забраняват разцепването/сливане на ядра
- разрешават/забраняват пакетно движение на ядра

Съществуват 18 различни алгоритъма, отчитащи различните видове опростявания на алгоритъма за движение на ядрата в рамките на един преход. Те се получават от комбинирането на следните:

- Три възможности, свързани с това, че капацитетите на позициите са: 1, краен брой и ∞
- Три възможности, свързани с това, че капацитетите на дъгите са: 1, краен брой и ∞
- Две възможности по отношение на продължителността на активното състояние: само 1 или 2+ такта.

Базисният алгоритъм за движение на ядрата разглежда случая, когато капацитетите са крайни числа, а продължителността на активното състояние може да е 2+ такта.

Алгоритъм за движение на ядрата в преход
http://www.ifigenia.org/wiki/Algorithm_for_transition_functioning

Алгоритъм за движение на ядрата в цялата мрежа
http://www.ifigenia.org/wiki/Algorithm_for_generalized_net_functioning

Йерархични оператори

- $\mathcal{H}_1$ заменя (детайлизира) позиция с цяла подмрежа. $\mathcal{H}_2$ – обратно
- $\mathcal{H}_3$ заменя (детайлизира) преход с цяла подмрежа. $\mathcal{H}_4$ – обратно
- $\mathcal{H}_5$ заменя една подмрежа с друга
- $\mathcal{H}_6$ заменя едно ядро с подмрежа
- $\mathcal{H}_7$ заменя процеса на изчисляване на отделните предикати на прехода с мрежи.

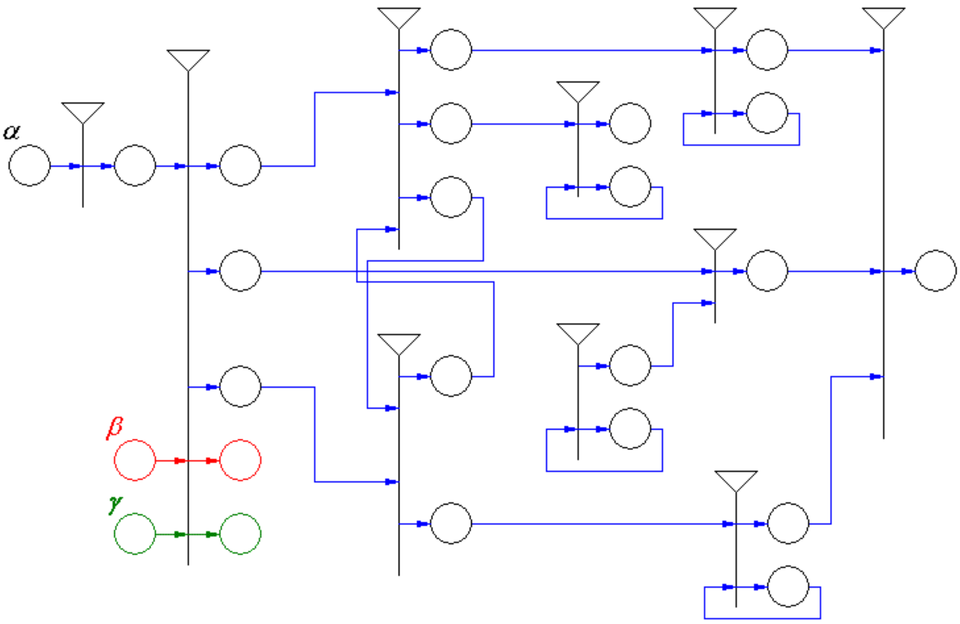
Самомодифициращи се обобщени мрежи

Самомодификацията да не развали управляващият контур
Възниква въпросът дали след самомодификацията резултатът продължава да е ОМ.

Приложения на обобщените мрежи

Приложения в областта на медицината и биотехнологиите
Приложения в областта на транспорта и индустрията

Пример с Нефтохим



Контури на ОМ

Приложения в областта на изкуствения интелект

Експертни системи от продукционен тип

Пример:

База данни с три елемента – факти:

$\Delta = \{A,B,C\}$

База знания от четири елемента – правила: (правило = антецедент $\mapsto$ консеквент)

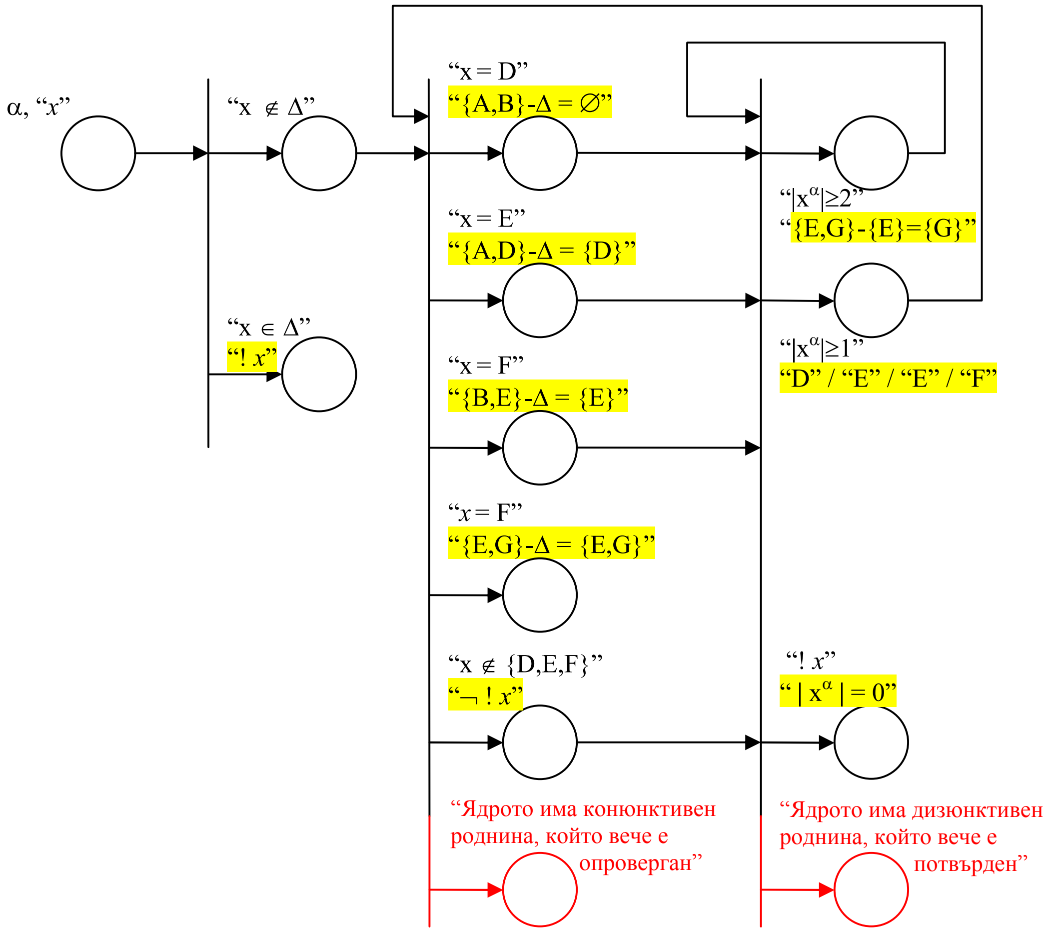
$R_1 = A, B \mapsto D$

$R_2 = A, D \mapsto E$

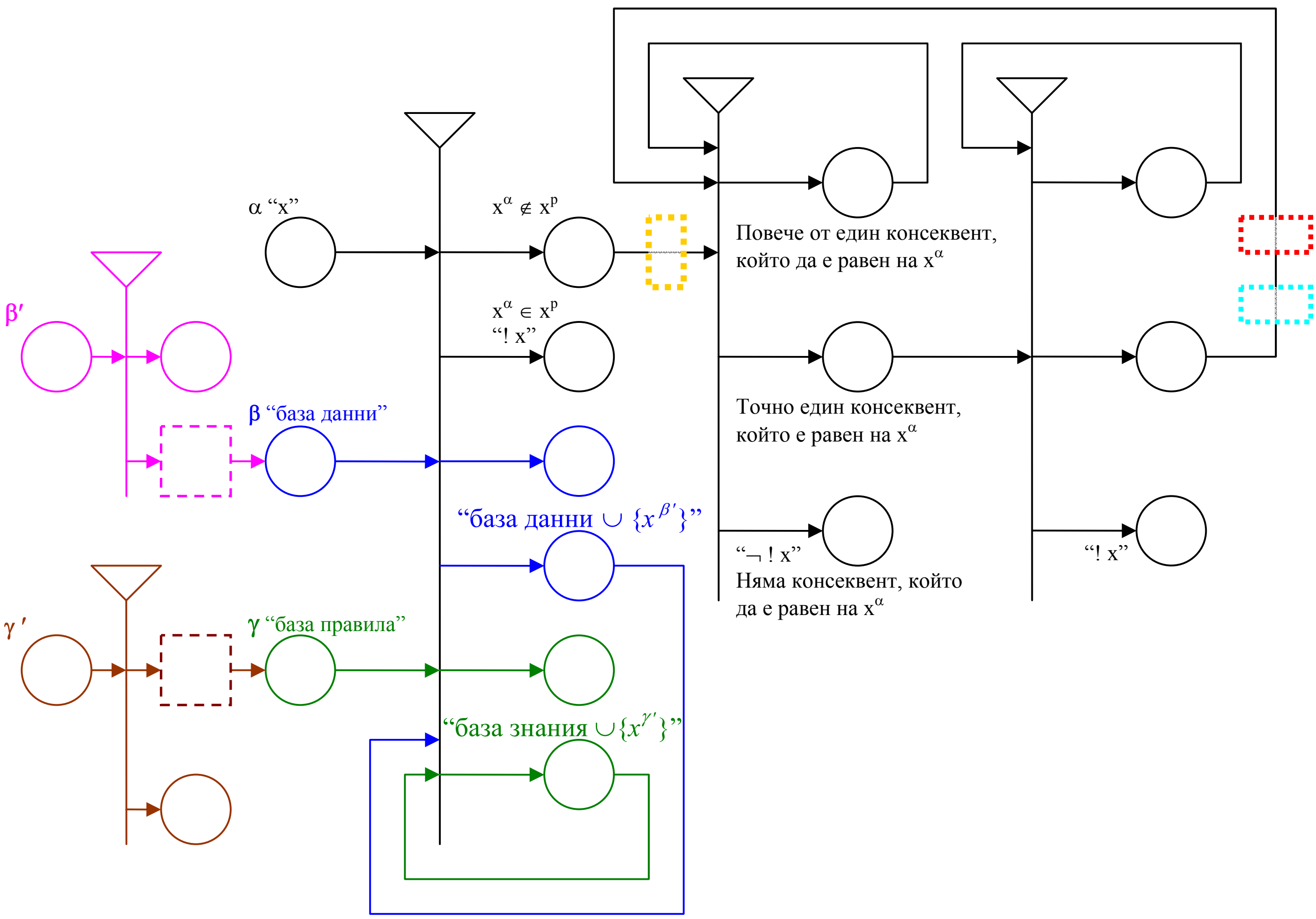
$R_3 = B, E \mapsto F$

$R_4 = E, G \mapsto F$

Конюнктивни роднини, дизюнктивни роднини



Важно е да се изхвърлят всички конюнктивни роднини след опровергаването на един, и да се изхвърлят всички дизюнктивни роднини след потвърждаването на един.



От 1999 – с идеи от обобщените мрежи се прави трето разширение на модела на експертните системи, довел и до смяна на парадигмата

1. Пристигане на нов **факт, имащ приоритет** и добавянето му в базата данни
1. Пристигане на ново **правило, имащо приоритет** и добавянето му в базата знания
3. Въвеждане на метафакти

Пример:
факти: ***има(Иван, кола) ; притежава(X, кола)***
метафакт: ***равно(име, притежава)***

4. Мадан Гупта – размити експертни системи. Разширяване към **интуиционистки размити експертни системи** – към експертните системи се добавя компонент за оценяване на интуиционистки размита оценка: силно оптимистична, оптимистична, средна, песимистична, силно песимистична
5. **Добавяне и на времена**: времеви интервали, когато даден факт е бил истина или лъжа: $\underbrace{t_1, t_2}_{\text{int 1}}, \underbrace{t_3, t_4}_{\text{int 2}}, \ldots$ и на тази база се правят оценки от вида „винаги", „често", „рядко", „някога", „понякога"

Унифициране на различните области от изкуствения интелект чрез описание в термините на обобщените мрежи.

- машинно обучение – мрежа, която обучава експертна система, невронна мрежа, генетичен алгоритъм; мрежа, която обучава обучаващата мрежа
- интелектуални игри – задача за осемте царици, пъзел, судоку?
- разпознаване на образи и говор
- електронно обучение, оценяване на обучаеми и преподаватели
- машина на Тюринг, крайни автомати, автомати със стекова памет на Мили и Мур
- Пролог: всяка програма на Пролог е описуема с ОМ
- мултиагентни системи

- за всеки клас невронни мрежи е показано, че съществува една ОМ за целия клас (примерно НМ на Кохонен).

  ОМ. Вход три ядра: (1) структура на даден вид невронна мрежа, (2) максимално време за постигане на решение, (3) определена точност на резултата. В резултат ОМ подава като изход ***структурата*** *(броя неврони във вътрешния слой, брой слоеве?) на нова невронна мрежа, която има като характеристики желаните на входа (2) и (3).*
- автоматично доказателство на теореми
- ant colony optimization
- генетични мрежи
- игрово моделиране, игра Живот